

# Chương 1

## CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

Các hiện tượng trong đời sống hàng ngày xảy ra một cách ngẫu nhiên và bất định. Chẳng hạn, đun nước ở điều kiện bình thường đến  $100^{\circ}\text{C}$  thì nước sẽ sôi, một viên bi được thả từ trên cao chắc chắn sẽ rơi về phía Trái Đất... Đó là những hiện tượng diễn ra có tính quy luật, bất định. Trái lại, những hiện tượng mà cho dù khi được thực hiện trong cùng một điều kiện vẫn có thể sẽ cho ra các kết quả khác nhau được gọi là những hiện tượng ngẫu nhiên. Chẳng hạn, ta không thể xác định trước chỉ số chứng khoán trên thị trường chứng khoán, có bao nhiêu khách hàng đến siêu thị trong khoảng thời gian nào đó hay có bao nhiêu cuộc gọi đến một tổng đài... Các hiện tượng ngẫu nhiên là đối tượng nghiên cứu của xác suất. Lí thuyết xác suất nghiên cứu tính quy luật của các hiện tượng đó để có thể dự báo kết quả của chúng. Chính vì vậy, nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học tự nhiên, kỹ thuật, kinh tế và xã hội... đều sử dụng tích cực các phương pháp và mô hình xác suất.

### 1.1. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Những kiến thức về giải tích tổ hợp học viên đã được học trong chương trình phổ thông. Tuy nhiên để giúp người học dễ dàng tiếp thu kiến thức của những chương kế tiếp, chúng tôi giới thiệu lại một cách có hệ thống những kiến thức này.

#### 1.1.1. Quy tắc cộng

Trong thực tế, một công việc có thể được tiến hành theo 1 trong  $k$  phương án:

Phương án thứ nhất: có 1 trong  $n_1$  cách thực hiện.

Phương án thứ hai: có 1 trong  $n_2$  cách thực hiện.

.....

Phương án thứ  $k$ : có 1 trong  $n_k$  cách thực hiện.

Gọi  $n$  là số cách hoàn thành công việc nói trên, ta có:  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  và được gọi là quy tắc cộng.

**Ví dụ 1.1.** Các nhóm I, II, III lần lượt có 2, 3, 3 học viên. Cần chọn 2 học viên cùng một nhóm. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

#### Lời giải.

Phương án thứ nhất: chọn 2 học viên nhóm I có  $n_1 = 1$  cách.

Phương án thứ hai: chọn 2 học viên nhóm II có  $n_2 = 3$  cách.

Phương án thứ ba: chọn 2 học viên nhóm III có  $n_3 = 3$  cách.

Do đó, số cách chọn hai học viên cùng nhóm là:  $n = 1 + 3 + 3 = 7$  cách.

#### 1.1.2. Quy tắc nhân

Để hoàn thành một công việc, ta phải thực hiện dãy liên tiếp  $k$  hành động:

Hành động thứ nhất: có 1 trong  $n_1$  cách thực hiện.

Hành động thứ hai: có 1 trong  $n_2$  cách thực hiện.

.....

Hành động thứ  $k$ : có 1 trong  $n_k$  cách thực hiện.

Gọi  $n$  là số cách hoàn thành công việc nói trên, ta có:  $n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  và được gọi là quy tắc nhân.

**Ví dụ 1.2.** Để đi từ thành phố A tới thành phố C phải qua thành phố B. Có một trong bốn cách để đi từ A tới B là: đường bộ, đường sắt, đường không và đường biển. Có một trong hai cách để đi từ B tới C là đường bộ và đường sắt. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A tới C?

**Lời giải.**

Để đi từ thành phố A tới thành phố C ta phải thực hiện một dãy liên tiếp hai hành động.

Hành động thứ nhất: để đi từ A tới B có  $n_1 = 4$  cách.

Hành động thứ hai: để đi từ B tới C có  $n_2 = 2$  cách.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách đi từ A tới C là  $n = 4.2 = 8$  cách.

### 1.1.3. Chỉnh hợp

#### a) Chỉnh hợp không lặp

**Định nghĩa 1.1.** Chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử ( $k \leq n$ ) là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm  $k$  phần tử khác nhau được chọn từ  $n$  phần tử đã cho. Số chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử kí hiệu là  $A_n^k$ .

**Ví dụ 1.3.** Có 4 chữ số 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu số gồm 2 chữ số khác nhau? Các số đó là: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Mỗi một số trên chính là một cách sắp xếp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau lấy từ bốn phần tử là bốn chữ số đã cho. Vậy mỗi số là một chỉnh hợp không lặp chập hai của bốn phần tử.

Để tạo ra một chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử ta phải thực hiện một dãy liên tiếp  $k$  hành động.

Bước 1, chọn 1 trong  $n$  phần tử để xếp đầu: có  $n$  cách.

Bước 2, chọn 1 trong  $n - 1$  phần tử còn lại để xếp thứ 2: có  $n - 1$  cách.

.....

Bước  $k$ , chọn 1 trong  $n - (k - 1)$  phần tử còn lại, xếp thứ  $k$ : có  $n - (k - 1)$  cách.

Theo quy tắc nhân, số cách tạo ra một chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử là:

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

**Ví dụ 1.4.** Một bảng mạch có 8 vị trí khác nhau, mỗi vị trí đặt được 1 linh kiện. Nếu 4 vị trí đã có linh kiện được lắp đặt, hỏi có bao nhiêu mẫu thiết kế khác nhau cho bảng mạch này.

**Lời giải.** Số cách xếp 8 linh kiện vào 4 vị trí còn lại trên bảng mạch chính là việc chọn 4 phần tử khác nhau từ tập hợp gồm 8 phần tử. Mỗi cách xếp các thiết bị vào bảng mạch tạo ra 1 thiết kế mới nên thứ tự các linh kiện là quan trọng. Vậy số cách tạo ra một bảng mạch hoàn chỉnh là số chỉnh hợp chập 4 của 8 phần tử:

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8 - 4)!} = 8.7.6.5 = 1680 \text{ cách.}$$

### **b) Chỉnh hợp lặp**

Để hiểu thế nào là một chỉnh hợp lặp ta xét ví dụ sau.

**Ví dụ 1.5.** Hãy lập các số gồm 2 chữ số từ 4 chữ số: 1, 2, 3, 4.  
Các số đó là: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

Mỗi số trong các số nói trên là một cách sắp xếp có thứ tự gồm hai chữ số, mỗi chữ số có thể có mặt đến hai lần lấy từ bốn chữ số đã cho. Mỗi cách sắp xếp như vậy còn gọi là một chỉnh hợp lặp chập hai của bốn phần tử. Tổng quát hoá ta có định nghĩa sau.

**Định nghĩa 1.2.** Một chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự gồm  $k$  phần tử mà mỗi phần tử lấy từ  $n$  phần tử đã cho có thể có mặt nhiều lần. Số chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử là  $n^k$ .

**Ví dụ 1.6.** Cửa của một nhà xe được mở trực tuyến bằng cách kích hoạt một mã gồm 12 kí tự nhị phân. Hỏi có bao nhiêu mã khả dĩ?

**Lời giải.** Vì mỗi kí tự là mã nhị phân nên có 2 cách chọn gồm số 0 hoặc 1. Số mã khả dĩ là số các chỉnh hợp lặp chập 12 của 2 phần tử nên có tất cả  $2^{12} = 4096$ .

#### **1.1.4. Hoán vị**

Trước khi đưa ra khái niệm một hoán vị của  $n$  phần tử ta xét ví dụ sau.

**Ví dụ 1.7.** Có ba học viên A, B, C được sắp xếp ngồi cùng một bàn học. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Có một trong các cách sắp xếp sau: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Nhận thấy rằng: đổi chỗ bất kì hai học viên nào cho nhau ta đều được một cách sắp xếp khác. Từ một cách sắp xếp ban đầu, bằng cách đổi chỗ liên tiếp hai học viên cho nhau ta có thể đưa về các cách sắp xếp còn lại. Mỗi một cách sắp xếp như trên còn được gọi là một hoán vị của ba phần tử A, B, C. Tổng quát với tập hợp gồm  $n$  phần tử ta có định nghĩa sau.

**Định nghĩa 1.3.** Một hoán vị của  $n$  phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự  $n$  phần tử đó. Số tất cả các hoán vị của  $n$  phần tử kí hiệu là  $P_n$ .

Theo quy tắc nhân: Số cách tạo ra một hoán vị của  $n$  phần tử là:

$$P_n = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!.$$

**Ví dụ 1.8.** Có 3 cuốn sách Đại số (ĐS), 2 cuốn sách Giải tích (GT) và 5 cuốn sách Xác suất thống kê (XSTK) (các cuốn sách này khác nhau) được xếp vào 1 cái kệ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho các cuốn sách cùng loại đứng gần nhau?

#### **Lời giải.**

Để thỏa bài toán, ta chia công việc ra các giai đoạn như sau:

Giai đoạn 1: Phân kệ thành 3 phần để xếp 3 loại sách: có  $3!$  cách xếp.

Giai đoạn 2: Xếp 3 cuốn ĐS trong phần cho ĐS: có  $3!$  cách xếp.

Giai đoạn 3: Xếp 2 cuốn GT trong phần cho GT: có  $2!$  cách xếp.

Giai đoạn 4: Xếp 5 cuốn XSTK trong phần cho XSTK: có  $5!$  cách xếp.

Vậy số cách sắp xếp cho cả bài toán:  $3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 5! = 8640$  (cách).

### 1.1.5. Tổ hợp

**Định nghĩa 1.4.** Khi lấy ngẫu nhiên ra  $k$  phần tử từ một tập gồm  $n$  phần tử (ở đây là lấy đồng thời, lấy một lần ra  $k$  phần tử,  $k \leq n$ ), sao cho hai cách lấy ra  $k$  phần tử được gọi là khác nhau nếu giữa chúng có ít nhất 1 phần tử khác nhau (nghĩa là không phân biệt về thứ tự của các phần tử) thì: số cách lấy ra  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử như trên được gọi là tổ hợp chập  $k$  của  $n$ , kí hiệu là  $C_n^k$ .

Bằng cách đổi chỗ các phần tử cho nhau, một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử có thể tạo ra  $k!$  chỉnh hợp không lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử (tức là  $A_n^k$ ). Do đó

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Ví dụ 1.9.** Mỗi đề thi gồm có 5 câu hỏi khác nhau chọn từ ngân hàng 50 câu hỏi đã cho. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

**Lời giải.** Mỗi đề thi sẽ chọn 5 câu từ 50 câu đã cho trong ngân hàng câu hỏi. Do chọn không kể thứ tự, không trùng nhau nên số cách chọn là tổ hợp chập 5 của 50

$$C_{50}^5 = \frac{50!}{5!(50-5)!} = \frac{46.47.48.49.50}{2.3.4.5} = 2\,118\,760 \text{ (đề thi)}.$$

Cuối cùng, để ý là ta đã rất quen thuộc với khái niệm tổ hợp được dùng trong công thức nhị thức Newton

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Từ đó có thể dễ dàng chứng minh (để ý  $C_n^0 = C_n^n = 1$ ):

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{và} \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

## 1.2. SỰ KIẾN NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

### 1.2.1. Sự kiện (biến cố) ngẫu nhiên

Trong lí thuyết xác suất, *sự kiện* được hiểu như là một sự việc, một hiện tượng nào đó của cuộc sống tự nhiên và xã hội.

*Phép thử ngẫu nhiên* (hay còn gọi là phép thử) là một hành động hay thí nghiệm mà ta không đoán trước được kết quả của nó, tuy nhiên có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

**Ví dụ 1.10.** Gieo một con xúc xắc đồng chất trên một mặt phẳng (phép thử). Phép thử này có 6 kết quả là: xuất hiện mặt 1 chấm, mặt 2 chấm, ..., mặt 6 chấm. Mỗi kết quả này cùng với các kết quả phức tạp hơn như: xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố, mặt có số chấm chẵn, mặt có số chấm là bội của 2, đều có thể coi là các sự kiện.

Như vậy kết quả của một phép thử là một trường hợp riêng của sự kiện. Sự kiện được gọi là *tất yếu*, nếu nó chắc chắn xảy ra, và được gọi là *bất khả*, nếu nó